



УДК 69

doi: 10.55287/22275398\_2026\_58\_97

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СЕЧЕНИЙ И АНАЛИЗ СПОСОБОВ ЕЁ ПОСТРОЕНИЯ

Ю. Ю. Муссауи\*

С. А. Гасанова\*/\*\*

С. Г. Саиян\*\*/\*\*

\* ООО Научно-технический центр «АПМ», г. Королёв

\*\* Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва

\*\*\* Научно-образовательный центр компьютерного моделирования им. А. Б. Золотова (НИУ МГСУ), г. Москва

### Аннотация

В работе исследована эффективность применения поверхности несущей способности при расчете железобетонных сечений. Рассмотрены два метода её построения в пространстве усилий  $N-M_x-M_y$ : прямой метод, основанный на параметрическом переборе внешних усилий, и обратный метод, при котором точки поверхности определяются через задание предельных деформаций с последующим вычислением соответствующих усилий. Точность определения коэффициента использования прочности по предельному моменту оценена на тестовой выборке нагружений путём сравнения с эталонными значениями, полученными при прямом расчёте предельного состояния с учётом физической нелинейности материалов. Показано, что обе поверхности обеспечивают высокую точность оценки, при этом прямой метод формирует более гладкую поверхность, а обратный метод позволяет существенно сократить время её построения.

### Ключевые слова

Железобетонные сечения; физическая нелинейность; несущая способность; поверхность несущей способности.

### Дата поступления в редакцию

23.03.2026

### Дата принятия к печати

30.03.2026

### Введение

Одним из основных расчетов в строительстве является определение несущей способности железобетонных элементов. Непосредственное определение предельного состояния с учетом физической нелинейности материалов обеспечивает высокую точность, однако на практике требуется анализ большого числа комбинаций нагрузок, что делает такой подход вычислительно затратным [1–4]. Сократить время расчета позволяет использование поверхности несущей способности. Она представляет собой поверхность в трехмерном пространстве усилий  $N-M_x-M_y$ . Граница данной фигуры определяет пре-

дельное состояние сечения. Для точек, лежащих внутри поверхности, несущая способность обеспечена, а для точек вне данной фигуры — нет. Существование нескольких способов построения поверхности обусловлено различными подходами к формулировке предельного состояния: одни методы основываются на параметрическом переборе внешних усилий, другие — на задании предельных деформаций и последующем определении внутренних усилий. В работах [5, 6] применяются оба подхода, что требует их сопоставления и оценки эффективности. В данной работе проводится сравнительный анализ прямого и обратного методов построения поверхности несущей способности железобетонных сечений.

Введём функцию, характеризующую степень исчерпания несущей способности сечения:

$$\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0, \quad (1)$$

где  $p_1, p_2, p_3$  — параметры, зависящие от выбранного метода.

Если  $\Phi < 0$  — несущая способность обеспечена,  $\Phi > 0$  — несущая способность не обеспечена,  $\Phi = 0$  — предельное состояние сечения.

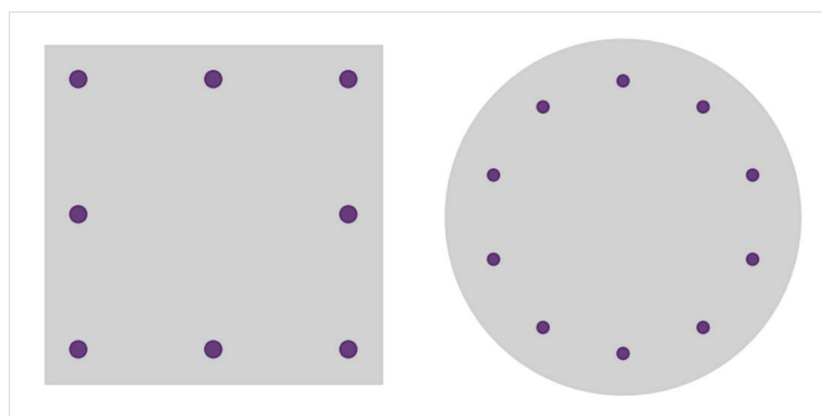
### 1. Расчетная модель железобетонного сечения

На *рисунке 1* представлены два рассматриваемых железобетонных сечения. Расчеты реализованы на языке программирования Python с учётом математической модели физической нелинейности и разупрочнения материалов в соответствии с СП 63 [7]. Связь между напряжениями и относительными деформациями выражается через физические соотношения:

$$\sigma_b = f_b(\varepsilon_b); \quad (2)$$

$$\sigma_s = f_s(\varepsilon_s), \quad (3)$$

где:  $\sigma_b, \sigma_s$  — напряжения в бетоне и арматуре;  $f_b, f_s$  — диаграммы состояния бетона и арматуры;  $\varepsilon_b, \varepsilon_s$  — относительные деформации бетона и арматуры.



*Рис. 1.* Рассматриваемые железобетонные сечения

В расчетах приняты бетон класса В20 и арматура класса А400. Работа материалов описывается двухлинейными диаграммами и  $\sigma$ – $\varepsilon$ , принятыми в соответствии с СП 63. Диаграммы деформирования материалов приведены на *рисунке 2*.

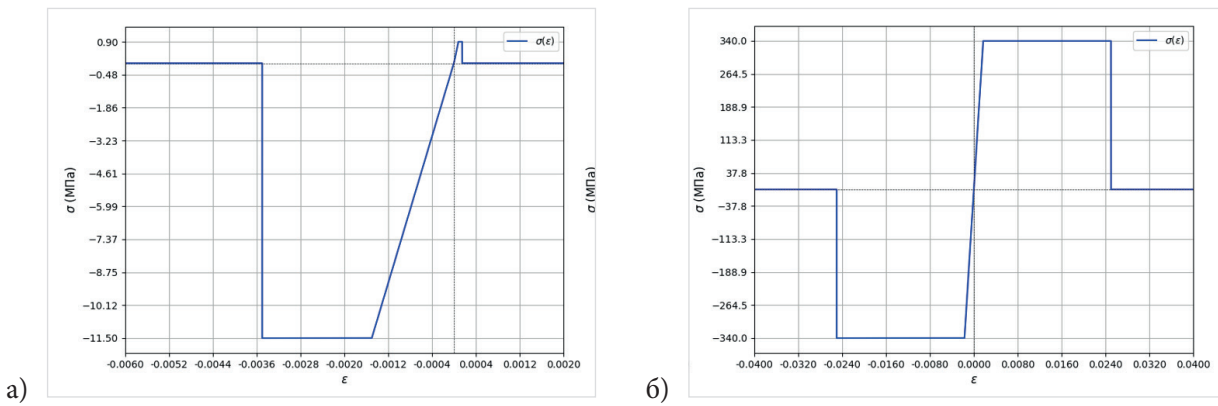


Рис. 2. Диаграммы  $\sigma - \epsilon$  материалов: а) бетон; б) арматура

В сечении действуют 3 силовых фактора: продольная сила  $N$  и два изгибающих момента  $M_x$ ,  $M_y$ . Критерием предельного состояния сечения является достижение предельной деформации хотя бы одним из материалов.

## 2. Прямой метод построения поверхности несущей способности

Метод основан на непосредственном расчёте напряжённо-деформированного состояния железобетонного сечения с учётом физической нелинейности и разупрочнения материала для каждой рассматриваемой точки [8]. Построение поверхности выполняется параметрическим перебором внешних нагрузок. На первом этапе определяются предельные продольные силы на сжатие  $N_c$  и растяжение  $N_t$ . Далее в полученном интервале по продольной силе  $[N_t, N_c]$  задаётся дискретный набор уровней  $N_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Для каждого уровня продольной силы исследуется плоскость изгибающих моментов, в которой равномерно распределяется  $\theta_j$ ,  $j = \overline{1, k}$  направлений (рис. 3).

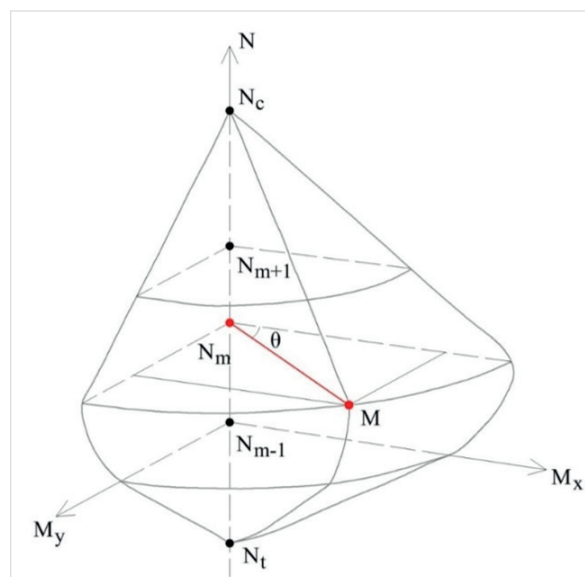


Рис. 3. Поверхность несущей способности прямого метода построения

Для каждой пары  $(N_i, \theta_j)$  выполняется серия расчетов по данному направлению, пока не найдется предельное значение момента  $M = M_{ij}^{np}$ , определяемого из условия:

$$\Phi(N_i, M \cos(\theta_j), M \sin(\theta_j)) = 0. \quad (4)$$

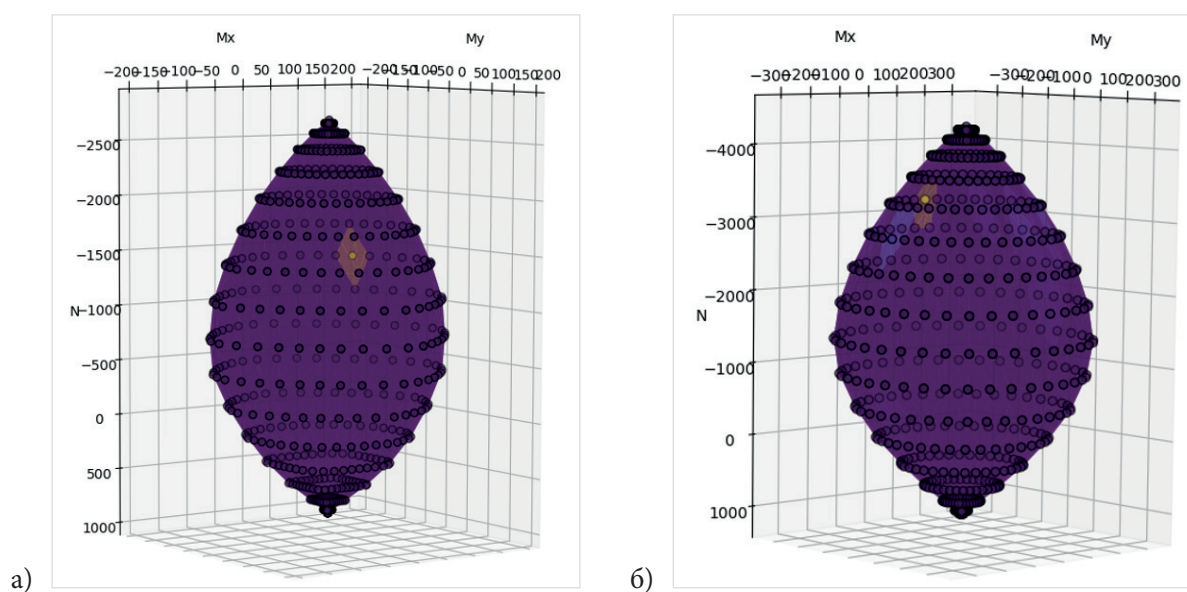
Найденное значение определяет предельную точку на поверхности несущей способности сечения:

$$F_{ij}^{np}(N_i, M_{ij}^{np} \cos(\theta_j), M_{ij}^{np} \sin(\theta_j)). \quad (5)$$

Множество предельных точек для всех направлений  $\theta_j$  формирует контур несущей способности в плоскости изгибающих моментов при фиксированной продольной силе  $N_i$ . Совокупность всех контуров образует дискретный набор точек  $S$ , описывающих поверхность несущей способности сечения. Далее по полученным точкам формируется сетка для дальнейшей работы с поверхностью:

$$S = \{F_{ij}^{np}\}_{i=\overline{1,n}; j=\overline{1,k}}. \quad (6)$$

Таким образом, искомая поверхность формируется из множества предельных состояний, полученных в заданных направлениях при фиксированной продольной силе путём полного расчета с учетом физической нелинейности. Полученные наборы точек поверхности для рассматриваемых сечений по данному методу представлены на **рисунке 4**.



**Рис. 4.** Полученный набор точек поверхности по прямому методу построения: а) квадратное сечение; б) круглое сечение

### 3. Обратный метод по предельным деформациям

Обратный метод основан на параметризации предельных состояний сечения через предельные деформации материалов и последующим определением соответствующих внутренних усилий путём интегрирования поля напряжений [9]. В отличие от прямого подхода, где задаётся внешнее воздействие и проверяется достижение предельного состояния, в данном методе задаётся поле деформаций, удовлетворяющее предельным условиям работы материалов. Предполагается выполнение гипотезы плоских сечений, благодаря которой распределение деформаций в поперечном сечении удовлетворяет линейному закону. Для удобства перейдём к системе координат  $\xi - \eta$ , где ось  $\xi$  параллельна нейтраль-

ной линии и проходит через центр тяжести сечения, тогда в этой системе координат деформации выражаются следующим образом:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 + K_\xi \eta, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_0$  — осевая деформация центра тяжести сечения,  $K_\xi$  — кривизна относительно оси  $\xi$ . При таком выборе системы координат кривизна относительно оси  $\eta$  всегда равна нулю (рис. 5) [10].

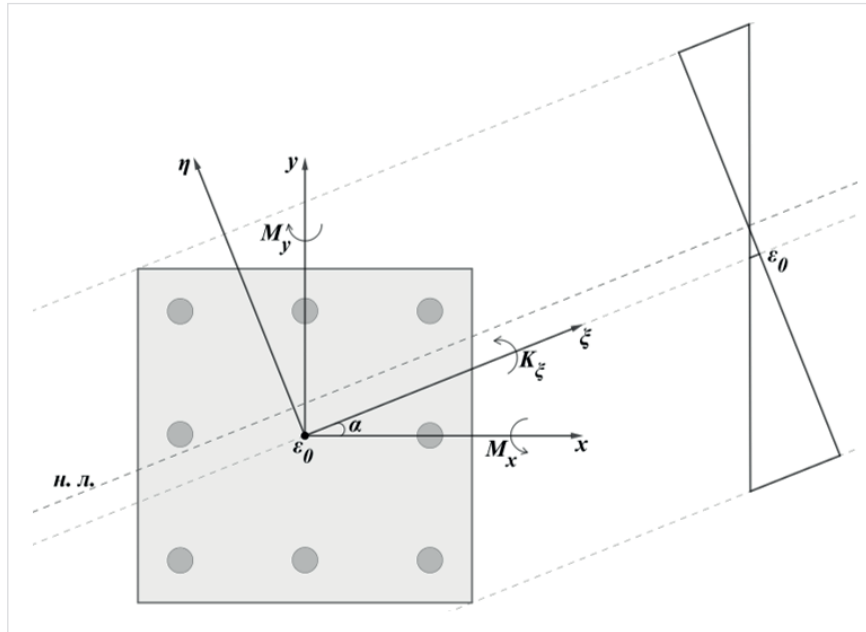


Рис. 5. Сечение в системе координат  $\xi - \eta$

Для каждой пары  $(\varepsilon_0, \alpha)$  подбираем значение кривизны  $K_\xi = K_\xi^{np}$ , при котором выполняется условие:

$$\Phi(\varepsilon_0, \alpha, K_\xi) = 0. \quad (8)$$

Найденное значение определяет предельное поле деформаций сечения, из которого по физическими соотношениями (2), (3) выполняется переход к полю напряжений, откуда внутренние усилия определяются по формулам:

$$\begin{aligned} N &= \iint \sigma(x, y) dA; \\ M_x &= \iint \sigma(x, y) y dA; \\ M_y &= \iint \sigma(x, y) x dA. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, получаем точку внутренних усилий:

$$F^{np}(N^{np}, M_x^{np}, M_y^{np}). \quad (10)$$

Множество предельных точек, полученных при фиксированном значении угла  $\alpha$  и различных значениях  $\varepsilon_0$  образуют меридиан поверхности несущей способности. При фиксированном значении  $\varepsilon_0$  и изменении угла  $\alpha$  формируется замкнутый контур в пространстве усилий — параллель поверхности (рис. 6).

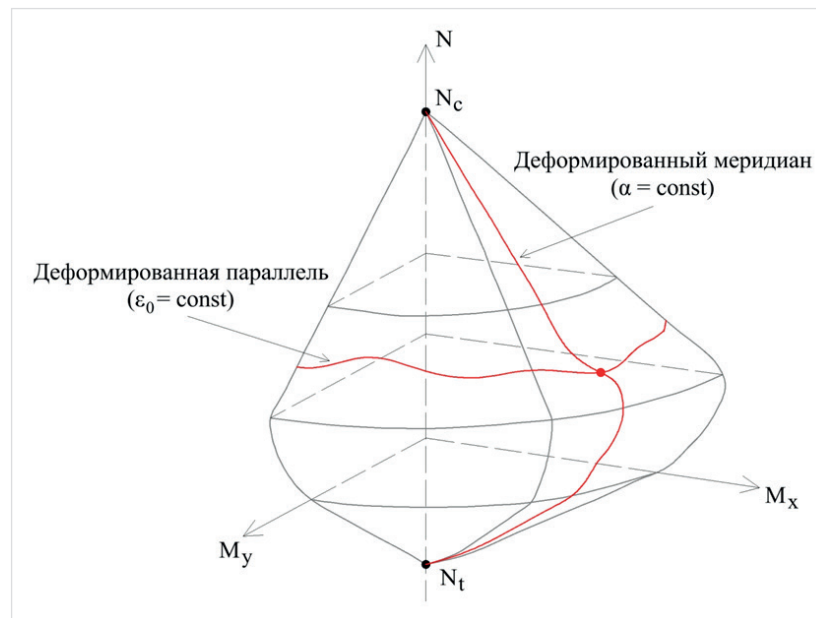


Рис. 6. Поверхность несущей способности обратного метода построения

Совокупность всех меридианов и параллелей образует дискретный набор точек  $S$ , описывающих поверхность несущей способности сечения:

$$S = \{F^{np}\}. \quad (11)$$

Таким образом, искомая поверхность формируется переходом от предельных напряженно-деформируемых состояний сечения в пространство внутренних усилий. Полученные наборы точек поверхности для рассматриваемых сечений по данному методу представлены на *рисунке 7*.

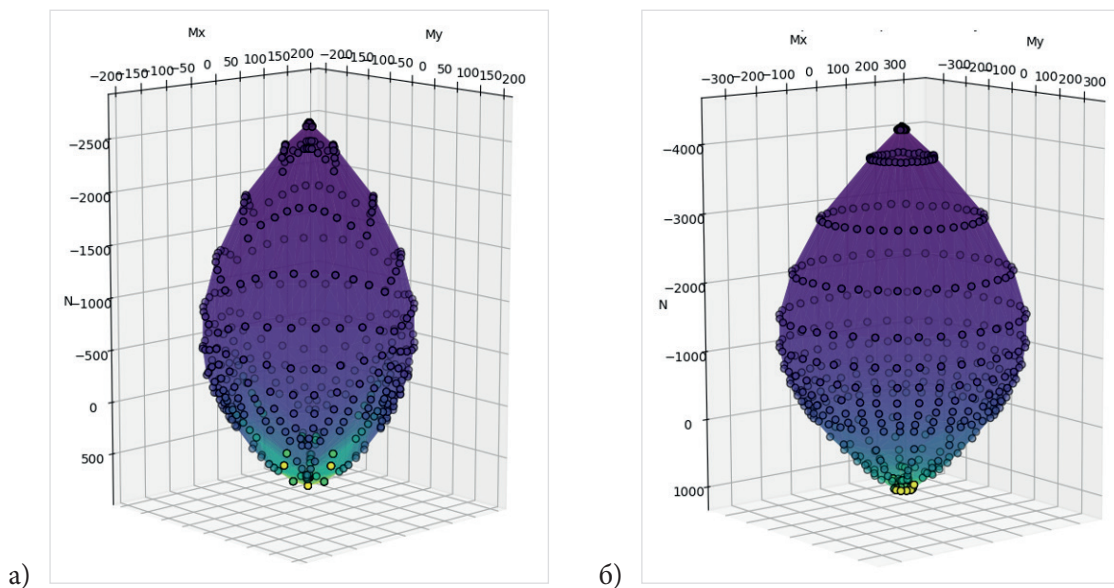


Рис. 7. Полученный набор точек поверхности по обратному методу построения: а) квадратное сечение; б) круглое сечение

#### 4. Анализ результатов

##### 4.1. Анализ геометрии поверхностей несущей способности

В данном разделе проводится сопоставление полученных поверхностей несущей способности с поверхностями, полученными в программе spColumn [11]. Анализ проводится для двух рассматриваемых сечений как в трёхмерном пространстве усилий (рис. 8, рис. 11), так и по характерным сечениям поверхности в плоскости  $M_x - M_y$  (рис. 9, рис. 12) и в плоскости  $N - M_x$  (рис. 10, рис. 13).

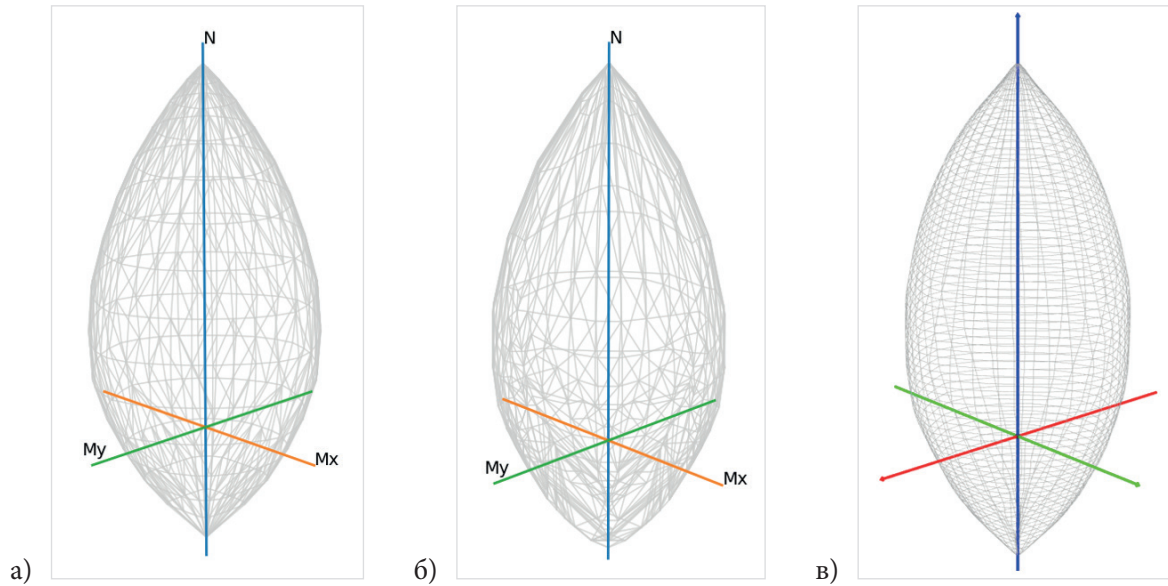


Рис. 8. Поверхность несущей способности для квадратного сечения: а) прямой метод; б) обратный метод; в) spColumn

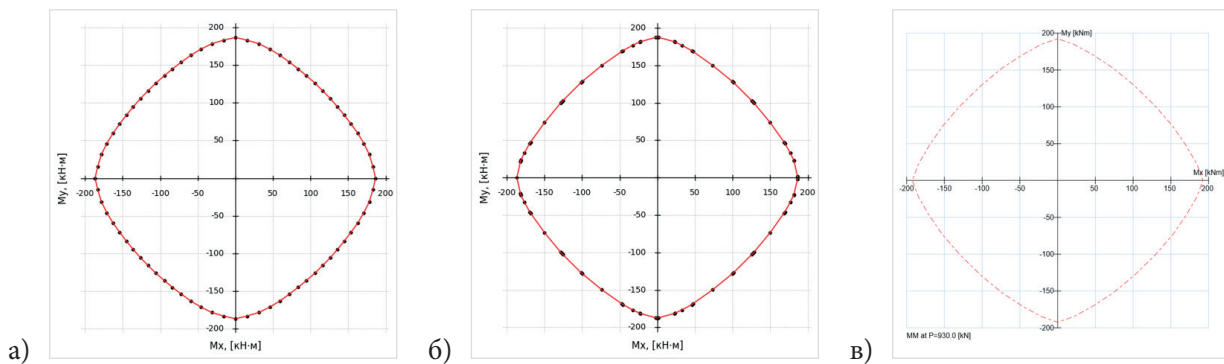


Рис. 9. Контур поверхности в плоскости  $M_x - M_y$  для квадратного сечения: а) прямой метод; б) обратный метод; в) spColumn

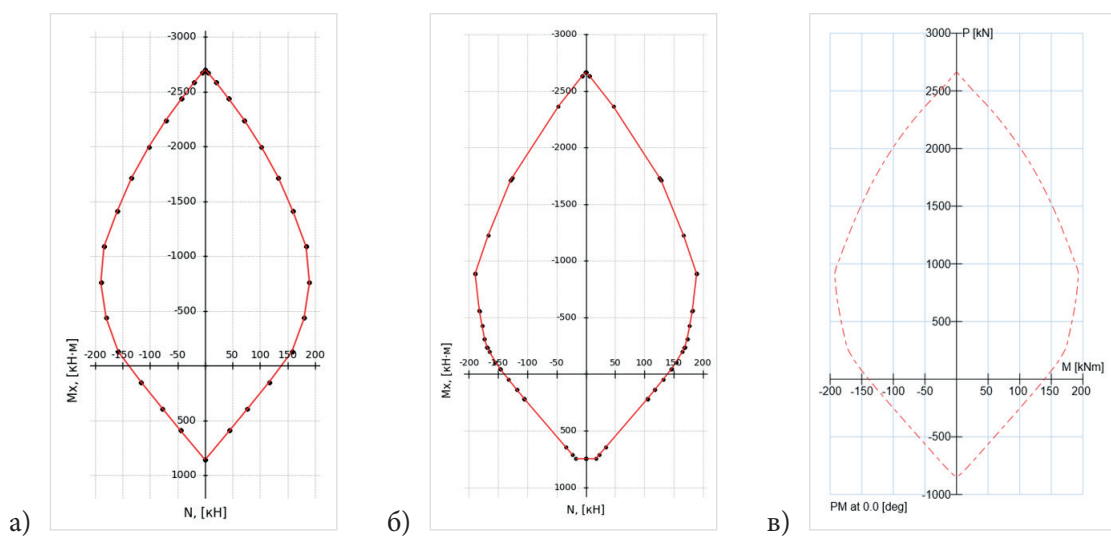


Рис. 10. Контур поверхности в плоскости  $N - M_x$  для квадратного сечения: а) прямой метод; б) обратный метод; в) spColumn

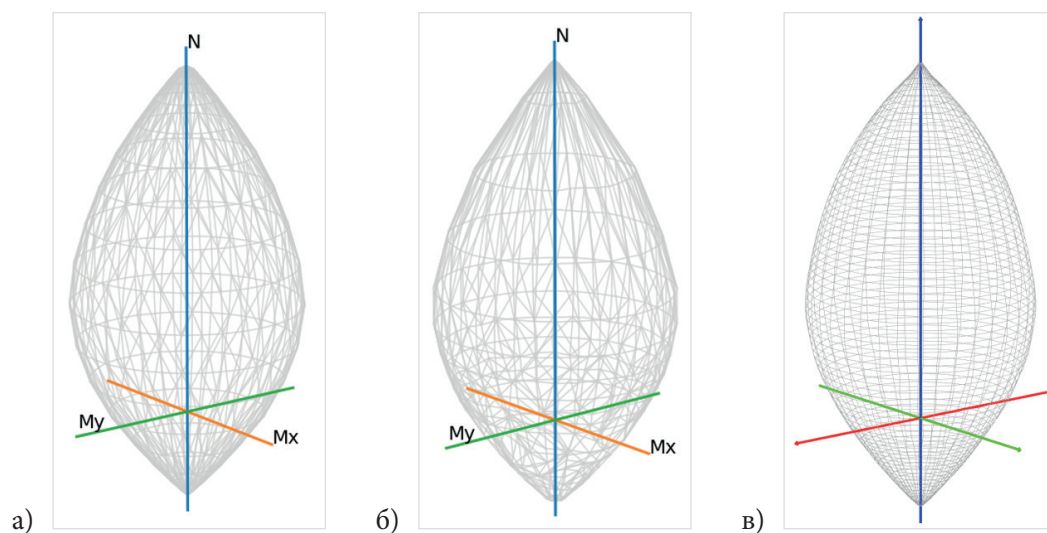


Рис. 11. Поверхность несущей способности для круглого сечения: а) прямой метод; б) обратный метод; в) spColumn

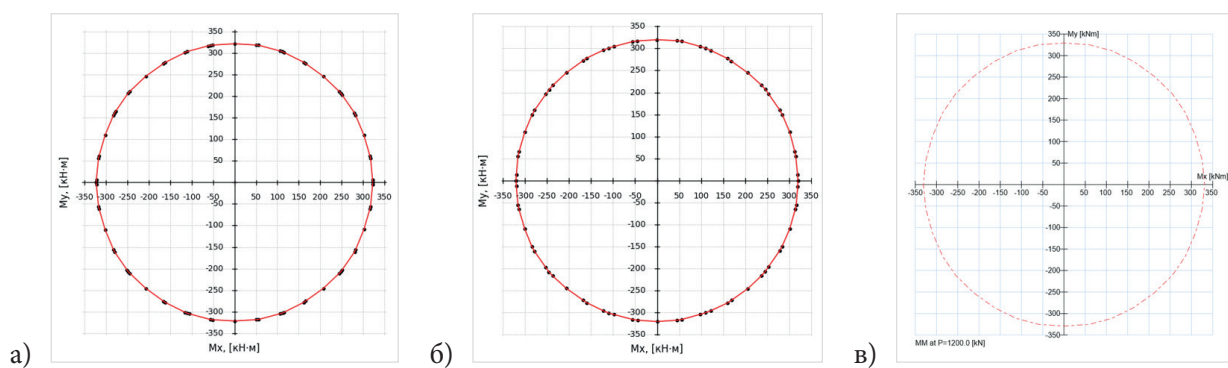


Рис. 12. Контур поверхности в плоскости  $M_x - M_y$  для круглого сечения: а) прямой метод; б) обратный метод; в) spColumn

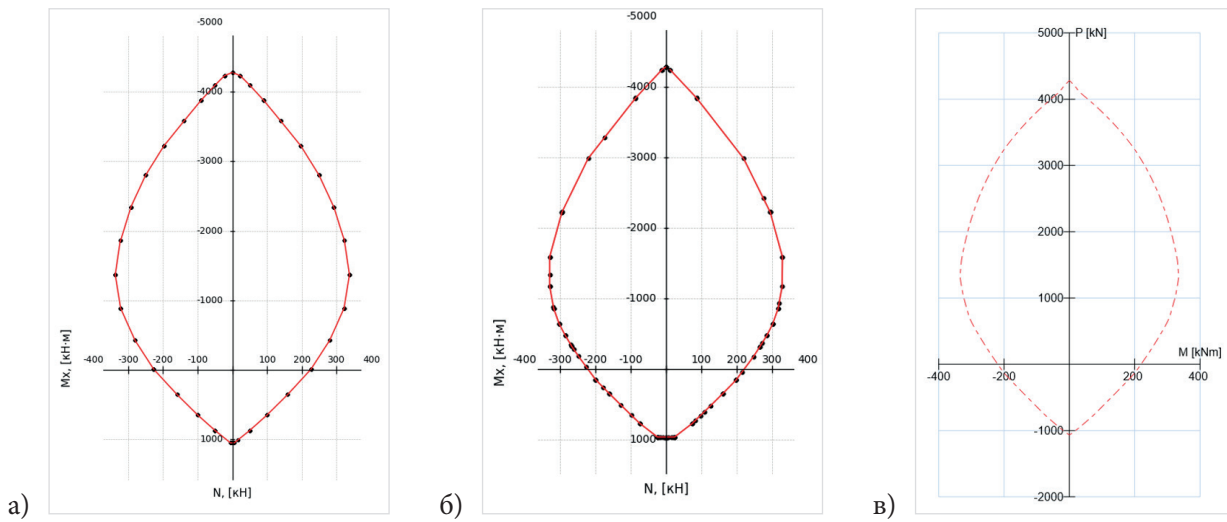


Рис. 13. Контур поверхности в плоскости  $N-M_x$  для круглого сечения: а) прямой метод; б) обратный метод; в) spColumn

#### 4.2. Анализ применения поверхностей для определения коэффициента использования прочности по предельному моменту

В данном разделе оценивается точность применения полученных ранее поверхностей для определения коэффициента использования прочности по предельному моменту сечения  $K_m$ . Данный коэффициент определяется как отношение длины радиус-вектора рассматриваемой точки к длине радиус-вектора предельной точки поверхности в том же направлении. Тестовая выборка состояла из 1000 загрузений для каждого сечения. Для каждой точки вычислялось значение коэффициента по поверхности, построенной прямым методом, и по поверхности, полученной обратным методом. В качестве эталонных значений использовались результаты полного расчёта предельного состояния сечения с учетом физической нелинейности.

Таблица 1

#### Метрики качества определения $K_m$ для квадратного сечения

Показатель	Прямой метод	Обратный метод
Средняя относительная ошибка (%)	0.8152	1.1041
Максимальная относительная ошибка (%)	21.8131	20.7571
Средняя абсолютная ошибка	0.0111	0.0156
Среднеквадратичная ошибка	0.0153	0.0188
Коэффициент детерминации	0.9992	0.9987
Максимальная абсолютная ошибка	0.0606	0.0667
90-й перцентиль относительной ошибки (%)	1.7918	1.8624
95-й перцентиль относительной ошибки (%)	1.9995	2.1864
99-й перцентиль относительной ошибки (%)	2.6729	2.8313
99.9-й перцентиль относительной ошибки (%)	10.1556	8.4288
Время расчета $K_m$ для тестовой выборки (сек.)	44.2131	47.7014

Метрики качества определения  $K_m$  для круглого сечения

Показатель	Прямой метод	Обратный метод
Средняя относительная ошибка (%)	0.4792	1.5671
Максимальная относительная ошибка (%)	2.6222	3.4141
Средняя абсолютная ошибка	0.0040	0.0136
Среднеквадратичная ошибка	0.0055	0.0152
Коэффициент детерминации	0.9997	0.9978
Максимальная абсолютная ошибка	0.0204	0.0504
90-й перцентиль относительной ошибки (%)	1.1148	2.1982
95-й перцентиль относительной ошибки (%)	1.4364	2.4116
99-й перцентиль относительной ошибки (%)	1.9151	2.8645
99.9-й перцентиль относительной ошибки (%)	2.3979	3.3199
Время расчета $K_m$ для тестовой выборки (сек.)	44.9091	32.2125

Результаты для двух сечений показывают, что обе поверхности обеспечивают высокую точность определения коэффициента использования прочности по предельному моменту. При этом поверхность, полученная прямым методом, в среднем демонстрирует несколько лучшие значения большинства метрик качества, тогда как обратный метод обеспечивает сопоставимую точность с небольшим увеличением ошибок. Следует отметить, что вычисление эталонных значений коэффициента  $K_m$  для тестовой выборки из 1000 загрузений заняло порядка 5 часов, как для квадратного, так и для круглого сечения. А определение  $K_m$  по поверхности несущей способности для той же выборки выполняется менее чем за минуту, что демонстрирует существенное сокращение времени вычислений. Расчёты были выполнены на ПК (Intel Core i5-1035G1, 8 ГБ ОЗУ).

При сравнении методов построения поверхности можно отметить, что прямой метод формирует более гладкую и равномерную поверхность в пространстве усилий. В обратном же методе точки задаются в пространстве деформаций, что затрудняет их подбор для равномерного заполнения пространства усилий и приводит к менее регулярному распределению точек на поверхности. Тем не менее полученные результаты показывают, что оба метода позволяют с высокой точностью оценивать несущую способность сечения.

#### Заключение

В работе выполнен сравнительный анализ прямого и обратного методов построения поверхности несущей способности железобетонных сечений в пространстве усилий  $N-M_x-M_y$ . Прямой метод основан на параметрическом переборе внешних усилий с определением предельного состояния по критерию достижения предельных деформаций материалов, тогда как обратный метод использует параметризацию предельных состояний через поле деформаций и последующее интегрирование напряжений по сечению для определения внутренних усилий.

Сравнение результатов для квадратного и круглого сечений показало согласованность общей геометрической формы получаемых поверхностей, близость контуров в характерных плоскостях  $M_x-M_y$

и  $N-M_x$ , а также отсутствие принципиальных различий в оценке несущей способности. При этом прямой метод формирует поверхность за несколько десятков минут, тогда как обратный метод обеспечивает её построение за несколько секунд. Таким образом, оба метода применимы для построения поверхностей несущей способности железобетонных сечений, однако прямой метод требует большего времени расчета и большей вычислительной мощности для своей реализации.

### Библиографический список

1. Краковский М. Б., Тихонов И. Н. Особенности расчетов нормальных сечений железобетонных конструкций по СП 63.13330.2018 // Бетон и железобетон. 2023. № 618 (4). С. 5–11.
2. Расчет железобетонных конструкций по прочности, трещиностойкости и деформациям / А. С. Залесов, Э. Н. Кодыш, Л. Л. Лемми, И. К. Никитин. — М.: Стройиздат, 1988. — 320 с.
3. Коянкин А. А., О расчёте железобетонных изгибаемых элементов на основе нелинейной деформационной модели // Academia. Архитектура и строительство. 2025. № 1.
4. Берлинова М. Н. К расчету сжатых железобетонных колонн в случае одностороннего химкоррозионного повреждения // Системные технологии. — 2023. — № 3 (48). — С. 42–47. DOI: 10.55287/22275398\_2023\_3\_42.
5. Charalampakis A. E., Koumousis V. K. Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load // Advances in Engineering Software. 2008. Vol. 39. P. 923–936.
6. Sfakianakis M. G. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics // Advances in Engineering Software. 2002. Vol. 33. P. 227–242.
7. Шевченко А. В., Давидюк А. А., Баглаев Н. Н. Метод итераций для расчета железобетонных элементов на основе нелинейной деформационной модели // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 3. С. 13–18.
8. Залесов А. С., Мухамедиев Т. А., Чистяков Е. А. Учет физической нелинейности при расчете железобетонных монолитных конструкций высотных зданий // Строительная механика и расчет сооружений. 2005. № 1. С. 4–8.
9. Kim H.-S. Interaction Diagram of Arbitrarily Shaped Concrete Sections Determined by Constrained Nonlinear Optimization // KSCE Journal of Civil Engineering. 2021. Vol. 25, № 10. С. 3823–3834.
10. Kim H. S., Choi H. N. Interaction Diagram of Jacketed Reinforced Concrete Section Considering the Effect of Preload // Int. J. Concr. Struct. Mater. 2025. Vol. 19. P. 108.
11. STRUCTUREPOINT LLC. spColumn®: Computer program for engineering design of reinforced concrete sections [Electronic resource]. — Portland, OR: STRUCTUREPOINT LLC, 2002–2016.

---

## EFFICIENCY OF USING THE BEARING CAPACITY SURFACE OF REINFORCED CONCRETE SECTIONS AND ANALYSIS OF METHODS FOR ITS CONSTRUCTION

**Yo. Yo. Moussaui** \*  
**S. A. Gasanova** \*/\*\*  
**S. G. Saiyan** \*\*/\*\*\*

\* LLC Scientific and Technical Center “APM”, Korolev

\*\* National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU), Moscow

\*\*\* Scientific and Educational Center for Computer Modeling of A. B. Zolotov (NRU MGSU), Moscow

---

#### **Abstract**

The study investigates the efficiency of using the bearing capacity surface in the design of reinforced concrete sections. Two methods for constructing it in the  $N-M_x-M_y$  force space are considered: the direct method, based on a parametric sweep of external forces, and the inverse method, in which points of the surface are determined by specifying ultimate strains followed by calculating the corresponding forces. The accuracy of determining the strength utilization coefficient based on the ultimate moment was evaluated on a test load set by comparing it with reference values obtained from direct ultimate state calculations considering the physical nonlinearity of materials. It is shown that both surfaces provide high accuracy, while the direct method produces a smoother surface, and the inverse method allows for a significant reduction in construction time.

#### **The Keywords**

*Reinforced concrete sections;  
physical nonlinearity; bearing  
capacity; bearing capacity surface.*

#### **Date of receipt in edition**

23.03.2026

#### **Date of acceptance for printing**

30.03.2026

---

#### **Ссылка для цитирования:**

Ю. Ю. Муссауи, С. А. Гасанова, С. Г. Саиян. Эффективность применения поверхности несущей способности железобетонных сечений и анализ способов её построения. — Системные технологии. — 2026. — № 1 (58). — С. 97–108.