



УДК 624.01

doi: 10.55287/22275398\_2026\_59\_24

---

## АНАЛИЗ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦЕНТРЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**М. В. Мозголов**

**В. В. Костюков**

**А. Р. Исаева**

Коломенский институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский политехнический университет», г. Коломна

---

### **Аннотация**

При выполнении прочностных расчетов строительных конструкций на компьютере в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов, для обоснования правильности полученных данных необходимо использовать разные конечно-элементные модели. Модели пространственной задачи теории упругости являются наиболее информативными, но трудоемкими при их анализе. Данная работа является продолжением численного эксперимента по выяснению правильного выбора места действия напряжений в объемных конечных элементах первого порядка твердотельных моделей при вычислении изгибающих моментов. В первой части работы было доказано, что использование в расчете напряжений, действующих на гранях конструкции в звезде элементов узла, обеспечивает необходимую точность вычислений, но требует анализа значительного количества данных.

Целью работы является выяснение возможности при вычислении изгибающих моментов в твердотельных моделях использовать усредненные напряжения, действующие в центре крайних конечных элементов с учетом применения весовых коэффициентов поперечного сечения.

Методика выполнения работы предусматривает сравнение изгибающих моментов, вычисленных по усредненным нормальным фибровым напряжениям в модели косоизгибаемой бетонной консольной балки сечением  $300 \times 600$  (h) мм, длиной 1800 мм. Модель выполнена из изопараметрического восьмиузлового конечного элемента первого порядка кубической формы с размером ребра 50 мм библиотеки BK SCAD++ с регулярной сеткой конечно-элементного разбиения.

Численный эксперимент показал хорошую сходимость результата, отклонения от аналитического расчета составили:  $-1,73\%$  и  $+1,13\%$ .

Практическая значимость работы состоит в том, что при вычислении изгибающих моментов в твердотельных компьютерных моделях, состоящих из объемных конечных элементов первого порядка, удобно использовать напряжения, действующие в центре крайних конечных элементов с учетом применения весовых коэффициентов поперечного сечения. Такой подход позволяет значительно сократить объем вычислений по сравнению с анализом данных звезды элементов узла.

### **Ключевые слова**

*Напряжения, изгибающие моменты, конечно-элементная модель, звезда элементов узла, центр конечного элемента, объемные конечные элементы, сходимость результата, весовой коэффициент сечения.*

**Дата поступления в редакцию**  
27.05.2026

**Дата принятия к печати**  
02.06.2026

## Введение

При выполнении прочностных расчетов многократно статически-неопределимых строительных систем на компьютере в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) для обоснования правильности полученных данных необходимо выполнять верификацию и валидацию расчетных моделей [1–6]. Для решения данной задачи используются разные конечно-элементные модели, состоящие из линейных, плоских, объемных, специальных конечных элементов (КЭ). Сложные модели могут включать в себя все типы КЭ [7]. Модели пространственной задачи теории упругости, состоящие из объемных конечных элементов, являются наиболее информативными с точки зрения изучения их напряженно-деформированного состояния (НДС) [8–12]. В связи с развитием компьютерной техники, данные модели все чаще используются проектировщиками. В BK SCAD для подбора армирования твердотельных компьютерных моделей железобетонных конструкций по найденным напряжениям необходимо вычислять усилия – изгибающие и крутящие моменты, продольные и поперечные силы.

Данная работа является продолжением численного эксперимента по выяснению правильного выбора места действия нормальных напряжений в объемных конечных элементах твердотельных моделей МКЭ при вычислении изгибающих моментов [13]. Ранее было доказано, что при вычислении усилий в конструкциях в расчете необходимо использовать напряжения, действующие в узлах конечных элементов, расположенных на гранях модели при условии выполнения усреднения значений по звезде элементов узла и количеству узлов [5, 13–15]. Однако, такой подход к решению задачи трудоемок. Известно, что точность вычисления деформаций и напряжений по МКЭ в центре конечных элементов является максимальной [2, с. 28] (Рис. 1). Между перемещениями или напряжениями, действующими в центре и узлах конечных элементов первого порядка, существует линейная зависимость [3, с. 249]. Напряжения в узлах конечных элементов, расположенных в вершинах КЭ, отличаются от центрального напряжения на величину весового коэффициента [16, с. 71]. Поэтому, данную методику следует применить к определению напряжений на грани изучаемого поперечного сечения, используя усредненные напряжения, действующие в центре крайних конечных элементов. Определение усилий в несущих строительных конструкциях по усредненным напряжениям значительно сократит вычислительную работу без потери точности результата.

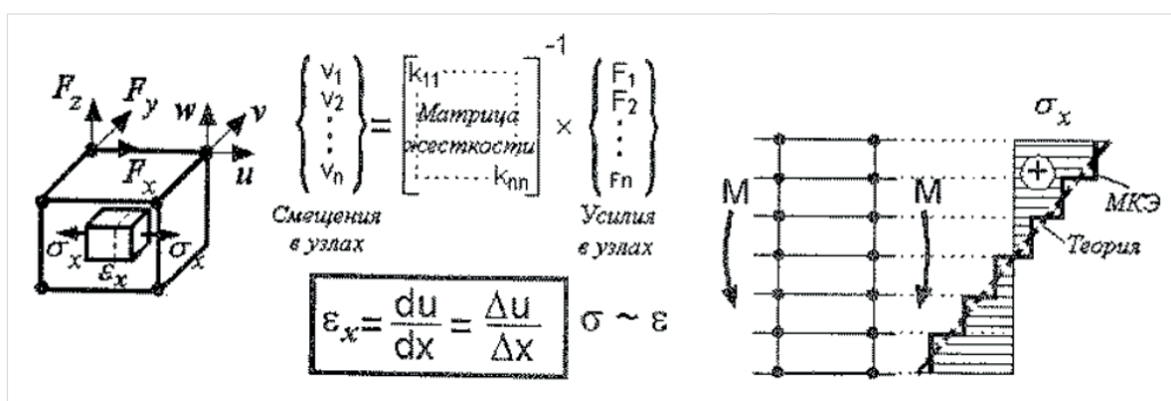


Рис. 1. Конечный элемент. Теоретическая и МКЭ эпюры напряжений по поперечному сечению конструкции [2]

## Цель работы

Целью работы является выяснение возможности при вычислении изгибающих моментов использования в расчетах усредненных нормальных напряжений, действующих в центре конечных элементов первого порядка с учетом применения весовых коэффициентов поперечного сечения.

## Материалы и методы исследования

Методика выполнения работы предусматривает сравнение изгибающих моментов, вычисленных по усредненным фибровым нормальным напряжениям в модели консольной балки, изгибаемой в двух направлениях. Эксперимент проводится в вычислительном комплексе SCAD++ версии 21. С целью исключения влияния сил, действующих на основании принципа Сен-Венана [6, с. 15], изгибающие моменты определяются во втором ряду КЭ на расстоянии от опоры 75 мм. Полученные данные компьютерного расчета сравниваются с данными известного аналитического метода расчета по правилам сопротивления материалов [17].

Так как верификация и валидация компьютерных моделей должны выполняться на основании сравнения с результатами хорошо поставленных экспериментов или внушающих доверие численных решений [18, 19 с. 113], эксперимент проводится на простой конструкции — косоизгибаемой консольной балке сечением  $300 \times 600$  ( $h$ ) мм, длиной 1800 мм, выполненной из бетона класса В25.

## Основная часть

Расчет выполняется в линейной постановке задачи, но с учетом понижающего коэффициента 0,2 для начального модуля упругости бетона. Следует заметить, что одинаковое изменение модуля упругости материала всех конечных элементов при линейном расчете оказывает влияние только на деформативность конструкции [11].

Для обеспечения правильности или сходимости полученных данных модель выполнена из изопараметрического восьмиузлового КЭ № 36 первого порядка кубической формы с размером ребра 50 мм библиотеки BK SCAD++. Сетка конечных элементов относительно частая, регулярная ( $6 \times 12$  ( $h$ ) КЭ). К балке приложены две силы: горизонтальная  $F_y = 9$  Т и вертикальная  $F_z = 18$  Т, распределенные по узлам торца (Рис. 2).

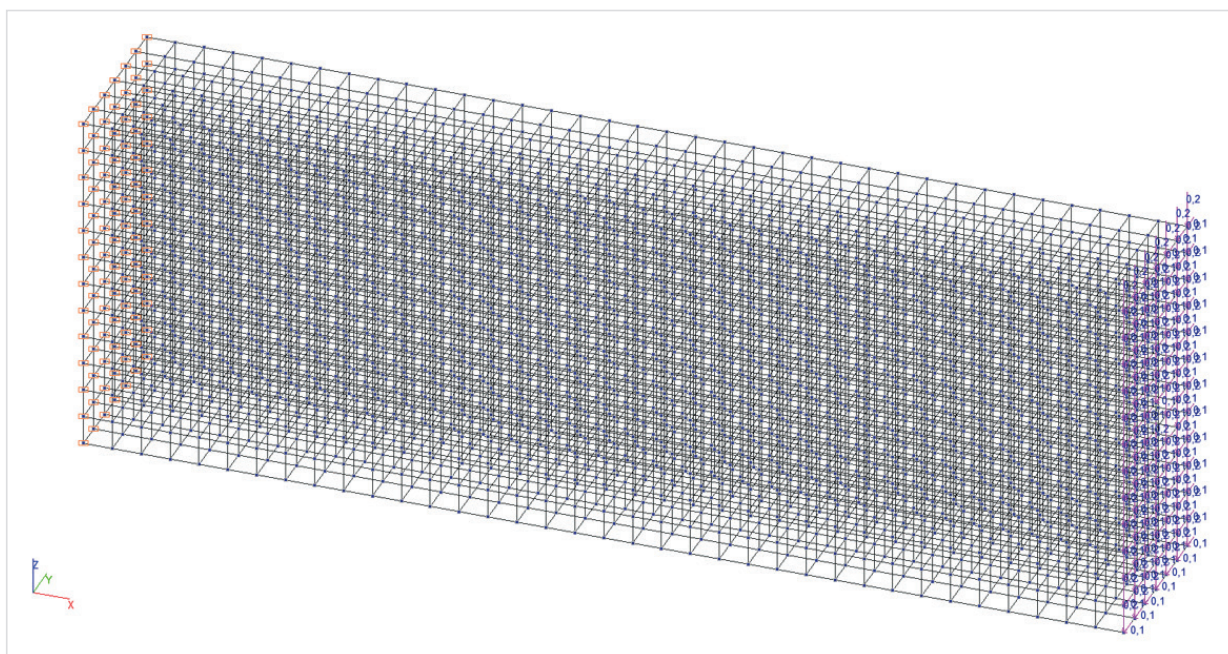


Рис. 2. Трехмерная модель из объемных конечных элементов первого порядка

Изгибающие моменты для твердотельной модели определяются по формулам [9]:

$$M_y = I_y \times \frac{\sigma_{x_{bt},max} - \sigma_{x_{bc},max}}{h}, \quad (1)$$

$$M_z = I_z \times \frac{\sigma_{x_{bt},max} - \sigma_{x_{bc},max}}{b}, \quad (2)$$

$$\sigma_{x_{bt},max} = \frac{\sigma_{x_{bt},max,1} + \sigma_{x_{bt},max,2} + \dots + \sigma_{x_{bt},max,n}}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{x_{bt},max,i}}{n}, \quad (3)$$

$$\sigma_{x_{bc},max} = \frac{\sigma_{x_{bc},max,1} + \sigma_{x_{bc},max,2} + \dots + \sigma_{x_{bc},max,n}}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{x_{bc},max,i}}{n}, \quad (4)$$

$$\sigma_{x_{bt},max,i} = \sigma_{x_{bt},центр КЭ,i} \times k, \quad (5)$$

$$\sigma_{x_{bc},max,i} = \sigma_{x_{bc},центр КЭ,i} \times k, \quad (6)$$

где:  $I_y$ — момент инерции конструкции относительно оси Y;  $I_z$ — момент инерции конструкции относительно оси Z;  $h$ — высота конструкции;  $b$ — ширина конструкции;  $n$ — количество анализируемых КЭ;  $\sigma_{x_{bt},max}$ — усредненные максимальные напряжения растяжения в крайней фибре поперечного сечения;  $\sigma_{x_{bc},max}$ — усредненные максимальные напряжения сжатия в крайней фибре поперечного сечения;  $\sigma_{x_{bt},центр КЭ,i}$ — напряжения растяжения в центре крайнего конечного элемента;  $\sigma_{x_{bc},центр КЭ,i}$ — напряжения сжатия в центре крайнего конечного элемента;  $k$ — весовой коэффициент поперечного сечения конструкции.

Деформированная изучаемая конструкция балки с полями нормальных напряжений  $\sigma_x$  вдоль оси X показана на **рисунке 3**. Значения напряжений  $\sigma_x$  в центре конечных элементов, расположенных в районе опоры показаны на **рисунке 4**.

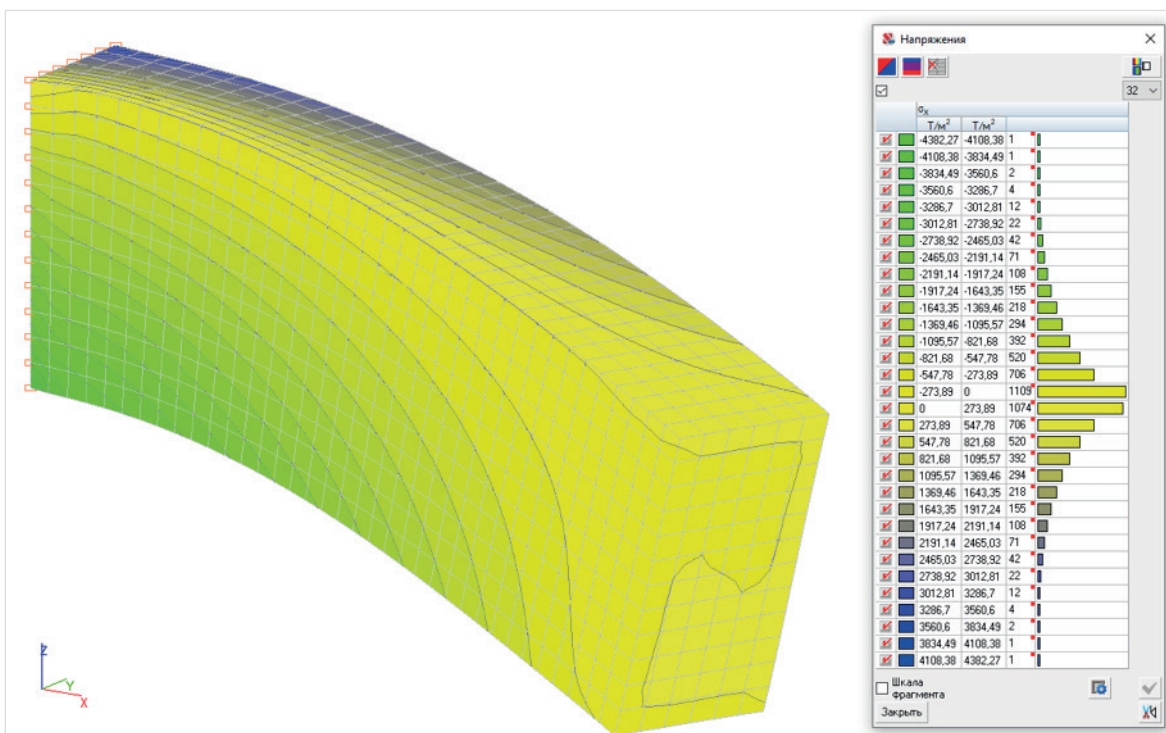


Рис. 3. Деформированная конструкция. Поля напряжений  $\sigma_x$

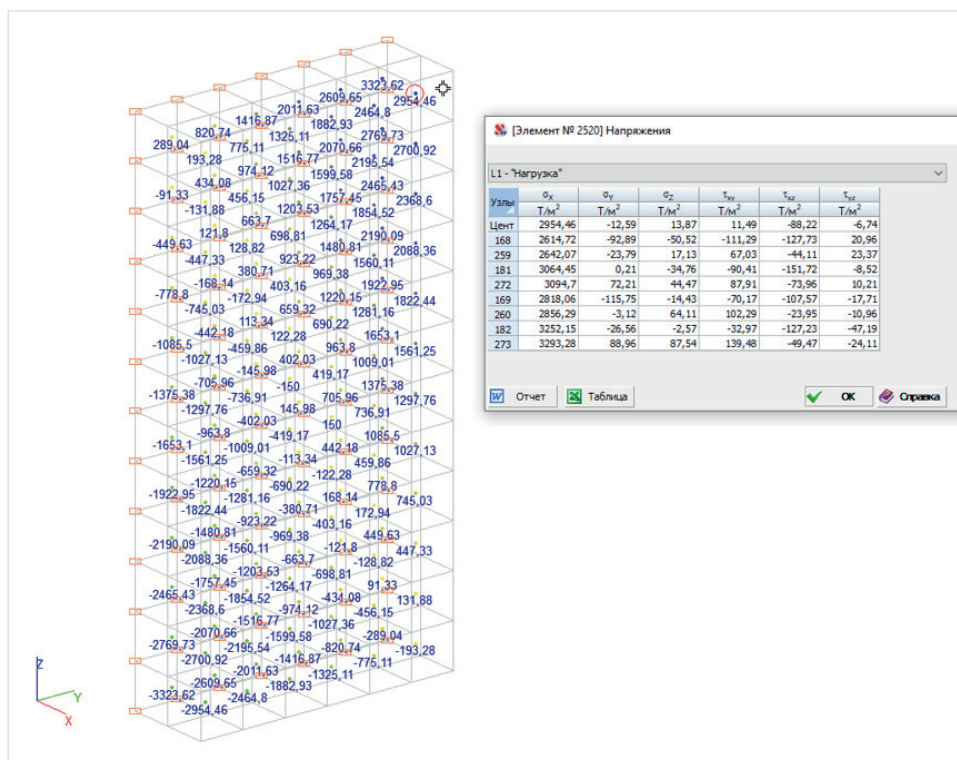


Рис. 4. Анализируемое поперечное сечение на расстоянии 75 мм от опоры вдоль оси X (второй ряд КЭ). Значения напряжений  $\sigma_x$  в центре конечных элементов

По действующим в центре крайних конечных элементов напряжениям вычислим их усредненные значения.

Сверху:

$$\sigma_{xbt, \text{ центр КЭ}} = \frac{193,28 + 775,11 + 1325,11 + 1882,93 + 2464,8 + 2954,46}{6} = 1599,28 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}. \quad (7)$$

Снизу:

$$\sigma_{xbs, \text{ центр КЭ}} = \frac{-193,2 - 775,11 - 1325,11 - 1882,93 - 2464,8 - 2954,46}{6} = -1599,28 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}. \quad (8)$$

Справа:

$$\sigma_{xbt, \text{ центр КЭ}} = \frac{(-193,28 + 131,88 + 447,33 + 745,03 + 1027,13 + 1297,76 + 1561,25 + 1822,44 + 2088,36 + 2368,6 + 2700,92 + 2954,46)}{12} = 1412,66 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}. \quad (9)$$

Слева:

$$\sigma_{xbs, \text{ центр КЭ}} = \frac{(193,28 - 131,88 - 447,33 - 745,03 - 1027,13 - 1297,76 - 1561,25 - 1822,44 - 2088,36 - 2368,6 - 2700,92 - 2954,46)}{12} = -1412,66 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}. \quad (10)$$

Вычислим весовые коэффициенты поперечного сечения.

Относительно оси Y:

$$k = \frac{300}{275} = 1,090909. \quad (11)$$

Относительно оси Z:

$$k = \frac{150}{125} = 1,2. \quad (12)$$

Вычислим фибровые напряжения на гранях конструкции.

Сверху:

$$\sigma_{x_{bt}, max} = 1599,28 \times 1,090909 = 1744,67 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}. \quad (13)$$

Снизу:

$$\sigma_{x_{bc}, max} = -1599,28 \times 1,090909 = -1744,67 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}. \quad (14)$$

Справа:

$$\sigma_{x_{bt}, max} = 1412,66 \times 1,2 = 1695,19 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}. \quad (15)$$

Слева:

$$\sigma_{x_{bc}, max} = -1412,66 \times 1,2 = -1695,19 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}. \quad (16)$$

Результаты расчетов усредненных значений напряжений, действующих по граням поперечного сечения конструкции, представлены в *таблице 1*.

Таблица 1

**Усредненные значения напряжений на гранях поперечного сечения конструкции**

Место поперечного сечения	Усредненные значения напряжений, Т/м <sup>2</sup>			
	Сверху $\sigma_{x_{bt}, max}$	Снизу $\sigma_{x_{bc}, max}$	Справа $\sigma_{x_{bt}, max}$	Слева $\sigma_{x_{bc}, max}$
75 мм от опоры	+1744,67	-1744,67	+1695,19	-1695,19

Моменты инерции поперечного сечения вычислены в первой части численного эксперимента [13].

Изгибающий момент  $M_y$ , вычисленный по данным компьютерной модели:

$$M_y = I_y \times \frac{\sigma_{x_{bt}, cp} - \sigma_{x_{bc}, cp}}{h} = \frac{540000}{10^8} \times \frac{1744,67 - (-1744,67)}{0,6} = 31,4 \text{ Тм}. \quad (17)$$

Изгибающий момент  $M_y$ , вычисленный по правилам сопротивления материалов:

$$M_y = F_z \times L_x = 18 \times 1,725 = 31,05 \text{ Тм}. \quad (18)$$

Погрешность компьютерного расчета составляет:

$$\delta = \frac{31,4 \times 100}{31,05} - 100 = 1,13\%. \quad (19)$$

Изгибающий момент  $M_z$ , вычисленный по данным компьютерной модели:

$$M_z = I_z \times \frac{\sigma_{x_{bt}, cp} - \sigma_{x_{bc}, cp}}{b} = \frac{135000}{10^8} \times \frac{1695,19 - (-1695,19)}{0,3} = 15,257 \text{ Тм}. \quad (20)$$

Изгибающий момент  $M_z$ , вычисленный по правилам сопротивления материалов:

$$M_z = F_y \times L_x = 9 \times 1,725 = 15,525 \text{ Тм}. \quad (21)$$

Погрешность компьютерного расчета составляет:

$$\delta = \frac{15,257 \times 100}{15,525} - 100 = -1,73\%. \quad (22)$$

## Выводы

1. Изгибающие моменты, вычисленные в анализируемой конструкции по данным нормальных напряжений компьютерной модели, действующих в центре крайних объемных конечных элементов первого порядка с учетом весовых коэффициентов поперечного сечения, имеют хорошую сходимость с известным аналитическим методом расчета. В рассматриваемом численном эксперименте отклонения составили:  $-1,73\%$  и  $+1,13\%$ .
2. При вычислении изгибающих моментов в твердотельных компьютерных моделях удобно использовать напряжения, действующие в центре крайних объемных конечных элементов первого порядка с учетом применения весовых коэффициентов поперечного сечения. Данный подход позволяет значительно сократить объем вычислений по сравнению с данными, полученными в звезде элементов узла конечных элементов, расположенных на гранях конструкции.

## Библиографический список

1. ГОСТ Р 57700.10-2018 Численное моделирование физических процессов. Определение напряженно-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов конструкций в упругой области. Москва; Стандартинформ; 2018.
2. А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. М.: Едиториал УРСС, 2003. 272 с.
3. Секулович М. Метод конечных элементов. Перевод с сербского Ю. Н. Зуева. Под редакцией В. Ш. Барбакадзе. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
4. Городецкий А. С., Евзеров И. Д. Компьютерные модели конструкций. К.: Факт, 2005. 344 с.
5. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
6. Перельмутер А. В. Беседы о строительной механике. М.: Издательство SCAD Soft, Издательский дом АСВ, 2016. 304 с.
7. Мозголов М. В., Костюков В. В., Сорока В. В. Статический анализ железобетонного покрытия шерстопрядильной фабрики Гатти системы Пьера Луиджи Нерви // Системные технологии. 2026. №1 (58). С. 67–81. DOI: 10.55287/22275398\_2026\_58\_67.
8. Никитин К. Е., Кирсанов О. А. Сравнительное исследование конечно-элементных методик расчета ребристых железобетонных перекрытий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Том 18. №3. С. 242–254. DOI: 10.22363/1815-5235-2022-18-3-242-254.
9. Пекин Д. А. Плитная сталежелезобетонная конструкция. М.: АСВ, 2010. 440 с.
10. Кашеварова Г. Г., Труфанов Н. А. Численное моделирование деформирования и разрушения системы «здание – фундамент – основание». Екатеринбург – Пермь: УрО РАН, 2005. 225 с.
11. Мозголов М. В., Козлова Е. В. Верификация стержневой и твердотельной моделей вычислительного комплекса SCAD расчета железобетонного кессонного перекрытия // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2023. №6. С. 35–47. DOI: 10.34031/2071-7318-2023-8-6-35-47.

12. Мозголов М. В., Козлова Е. В. Модель комплекса SCAD из объемных конечных элементов: расчет железобетонных кессонных перекрытий // Вестник НИЦ «Строительство». 2023. №2 (37). С. 18–36. DOI:10.37538/2224-9494-2023-2(37)-18-36.
13. Мозголов М. В., Костюков В. В. О выборе места действия напряжений при анализе усилий в твердотельной модели вычислительного комплекса SCAD // Системные технологии. 2023. №3 (48). С. 122–129. DOI: 10.55287/22275398\_2023\_3\_122.
14. Мозголов М. В., Костюков В. В., Сидоренко Д. А. О сходимости решений моделей вычислительного комплекса SCAD из трехгранной призмы первого порядка // Системные технологии. 2023. №4 (49). С. 144–153. DOI: 10.55287/22275398\_2023\_4\_144.
15. Мозголов М. В., Костюков В. В. О сходимости решений моделей вычислительного комплекса SCAD из трехгранной призмы первого порядка. Часть 2. Н-метод // Системные технологии. 2024. №1 (50). С. 5–19. DOI: 10.48612/dnitii/2024\_50\_5-19.
16. Городецкий А. С., Барабаш М. С., Сидоров В. Н. Компьютерное моделирование в задачах строительной механики. М.: АСВ, 2016. 337 с.
17. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 560 с.
18. Мозголов М. В. О строительстве конькобежного стадиона в городе Коломне // Вестник Коломенского института (филиала) Московского политехнического университета. Сборник научных трудов. Москва, 2024. С. 353–378.
19. Фиалко С. Ю. Применение метода конечных элементов к анализу прочности и несущей способности тонкостенных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. М.: Издательство СКАД СОФТ, Издательский дом АСВ, 2018. 192 с.

---

## ANALYSIS OF SOLID-STATE MODELS USING CENTER-STRESS FINITE ELEMENTS

**M. V. Mozgolov**  
**V. V. Kostyukov**  
**A. R. Isaeva**

Kolomna Institute (branch) of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “Moscow Polytechnic University”, Kolomna

---

### Abstract

When performing strength calculations of building structures on a computer using software packages based on the finite element method, it is necessary to use various finite element models to validate the obtained data. Models of spatial elasticity problems are the most informative, but are labor-intensive to analyze. This work is a continuation of a numerical experiment to determine the correct location of stresses in first-order volumetric finite elements of solid

### The Keywords

*Stress, bending moments, finite element model, star of node elements, finite element center, volumetric finite elements, result convergence, section weighting factor.*

models when calculating bending moments. In the first part of the work, it was demonstrated that using stresses acting on the faces of the structure in the star of node elements ensures the necessary calculation accuracy, but requires analyzing a significant amount of data.

The aim of this work is to elucidate the feasibility of using average stresses acting at the centers of the outermost finite elements when calculating bending moments in solid models, taking into account the application of cross-sectional weighting factors. The study methodology involves comparing bending moments calculated using averaged normal fiber stresses in a model of an obliquely bent concrete cantilever beam with a cross-section of  $300 \times 600$  ( $h$ ) mm and a length of 1800 mm. The model is constructed using an isoparametric eight-node first-order cubic finite element with a 50 mm edge size from the SCAD++ library with a regular finite element mesh.

The numerical experiment demonstrated good convergence of the results, with deviations from the analytical calculations amounting to  $-1.73\%$  and  $+1.13\%$ .

The practical significance of this study lies in the fact that when calculating bending moments in solid-state computer models consisting of first-order volumetric finite elements, it is convenient to use the stresses acting at the centers of the outermost finite elements, taking into account the application of cross-sectional weighting factors. This approach significantly reduces the computational effort compared to analyzing the star data of node elements.

**Date of receipt in edition**

27.05.2026

**Date of acceptance for printing**

02.06.2026

---

**Ссылка для цитирования:**

*М. В. Мозголов, В. В. Костюков, А. Р. Исаева. Анализ твердотельных моделей с использованием напряжений в центре конечных элементов. — Системные технологии. — 2026. — № 2 (59). — С. 24–32.*