



СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ПОКРЫТИЯ ШЕРСТОПРЯДИЛЬНОЙ ФАБРИКИ ГАТТИ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛИ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

М. В. Мозголов

В. В. Костюков

Д. С. Лебедев

Коломенский институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский политехнический университет», г. Коломна

Аннотация

В связи с задачами большой размерности при анализе статически неопределимых систем на современном этапе проектной деятельности без использования компьютерных расчетов, основанных на методе конечных элементов, обойтись нельзя. Однако, необходимо помнить, что метод конечных элементов является приближенным численным методом математической физики и получаемые по нему результаты для разных конечно-элементных моделей могут существенно отличаться. Для подробного и наиболее достоверного изучения работы сложной строительной конструкции необходимо выполнять её анализ при помощи разных конечно-элементных моделей.

В работе сравниваются изгибающие моменты в главных балках бионической конструкции покрытия системы Пьера Луиджи Нерви, вычисленные по данным двух конечно-элементных моделей. Модели отличаются типами конечных элементов в пролетной части строительной системы, моделирующих полку и ребра тавровых балок. Первая модель выполнена из оболочек и стержней, соединенных жесткой вставкой. Вторая модель состоит из оболочек, соединенных твердым телом. Опорная часть конструкции, имеющая форму капители, выполнена из объемных конечных элементов. Анализ полученных данных показал, что в опорной части балок второй модели произошло перераспределение усилий, а пролетные изгибающие моменты выросли на 45%.

Практическая значимость работы — для инженеров конструкторов, занимающихся прочностными расчетами строительных конструкций в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов.

Ключевые слова

Пьер Луиджи Нерви, напряжения, изгибающие моменты, конечно-элементная модель, верификация, сходимость результата, ребристое перекрытие, жесткость конструкции.

Дата поступления в редакцию

09.09.2026

Дата принятия к печати

13.09.2026

Введение

В настоящее время инженеры конструкторы зданий и сооружений при изучении напряженно-деформированного состояния (НДС) строительных систем без использования компьютерных про-

грамм, основанных на методе конечных элементов (МКЭ), обойтись не могут. Трудно себе представить, что при расчете многократно статически неопределимых конструкций современный проектировщик будет использовать метод сил или метод перемещений, тем более, при анализе на возможность прогрессирующего обрушения с учетом пространственной работы каркаса здания и его взаимодействия с грунтовым основанием, а также изменением НДС конструкций с учетом стадийности возведения объекта [1, 2]. Для такой размерности задачи при помощи вышеупомянутых традиционных методов строительной механики выполнить расчет не возможно, поэтому, на помощь приходит метод конечных элементов. Однако, необходимо помнить, что МКЭ — это приближенный численный метод математической физики и получаемые по нему результаты для разных конечно-элементных моделей (КЭМ) могут существенно отличаться [3–11]. Для компьютерного моделирования *«Правильность результатов — понятие очень неопределенное и растяжимое, в конце концов, это тоже термин и о нем можно спорить»* [3, с. 205]. При создании КЭМ и анализе их НДС иногда инженеры сталкиваются со значительным количеством трудностей. Так, например в работе [4] отмечается, что до сих пор для плиты перекрытия, подкрепленной ребрами не предложена оптимальная, то есть простая и точная расчетная компьютерная схема. А это одна из наиболее распространенных в строительстве несущих конструкций. При моделировании ребристой плиты покрытия размерами $12,3 \times 6,3 \times 0,6$ м с учетом наличия арматуры при помощи четырех КЭМ (стержневая, оболочечно-стержневая, оболочечная и модель из объемных конечных элементов (КЭ)) при сравнении деформаций с эталонной твердотельной моделью авторы получили следующие отклонения: 1 модель +9,2%; 2 модель +75,3%; 3 модель +44,5% [4]. Компьютерная модель сооружения должна быть настолько простой, чтобы расчет не становился слишком громоздким, но в тоже время должна правильно и полно отражать работу объекта [5, с. 32]. При помощи одной, даже очень подробной модели, невозможно полностью изучить работу сложной строительной системы, рекомендуется применять методы стратификации, фрагментации, суперэлементов [3, с. 137]. Для обоснования правильности полученного результата, поиска сходимости МКЭ, рекомендуются следующие способы: использование разных конечно-элементных моделей, состоящих из линейных, плоских, объемных, специальных конечных элементов, их сочетаний [3-5]; для плоских и объемных КЭ применяются геометрически подобные сетки разной величины (*h*-метод) с обработкой полученных данных при помощи экстраполяции Ричардсона, что позволяет получить прогнозное решение [5, с.188; 6]; применение в моделях конечных элементов разного порядка (*p*-метод) [7, с. 15; 8]; анализ в разных сертифицированных программных комплексах [9], тем более, если они созданы на основе метода перемещений и метода сил. При увеличении числа конечных элементов к точному решению по методу перемещений приближаются с нижней стороны, а по методу сил — с верхней стороны [10, с. 124]. В гидротехническом строительстве сходимость результата МКЭ изучается при помощи SRM и SAM методов [11]. Возрастающая мощь компьютеров и возможности программных комплексов при создании, и анализе разных конечно-элементных моделей проектируемых объектов будут требовать от инженеров все более высокой квалификации, поэтому, опыт верификационных исследований в методе конечных элементов является важным этапом современной проектной деятельности.

Цель работы

Выполнить верификационные сравнения напряженно-деформированного состояния бионической конструкции покрытия системы Пьера Луиджи Нерви при помощи разных компьютерных моделей с целью определения более простой и точной конечно-элементной модели.

Основная часть

Работа является продолжением численного исследования компьютерного моделирования ребристого покрытия фабрики Гатти системы Пьера Луиджи Нерви [12]. Ранее рассматривалась КЭМ, ребра в которой моделировались стержневыми конечными элементами, прикрепленными к плите при помощи абсолютно жестких вставок (модель 1). Плита выполнена из плоских оболочечных КЭ, капитель колонны моделировалась объемными конечными элементами. Монолитность узла прикрепления стержней к капителям обеспечивалась при помощи твердого тела. Отрицательным свойством такой модели является фиктивное напряженное состояние в элементах, а именно: уменьшенный изгибающий момент в ребрах балок и наличие значительной продольной силы, возникающей от установленной жесткой вставки, обеспечивающей смещение ребра относительно полки тавров. В связи с этим, в такой модели усилия в конструкции по полученным данным необходимо рассчитывать при помощи инженерного метода [3, с. 167].

В данной работе расчетная модель комбинированная (модель 2, *рисунок 1*), состоит из следующих конечных элементов библиотеки BK SCAD++ версии 21: плита — оболочки тип КЭ 42 и 44; ребра плиты — оболочки тип КЭ 42 и 44; капители колонн — объемные элементы тип КЭ 31; ребра с плитой соединяются при помощи трехмерного твердого тела — тип КЭ 100. Наложение объемов материалов в месте пересечения ребер с плитой отсутствует. Геометрия конструкции, свойства материалов и значения полезной нагрузки полностью соответствуют первой модели [12]. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности плиты. Для правильного изучения напряжений в конечных элементах применялась функция, предусмотренная программным комплексом — задание осей вычисления напряжений по направлению, заданному вектором. Сравниваются изгибающие моменты в главных балках B_1 и B_2 , расположенных в среднем пролете конструкции. Для определения изгибающих моментов необходимо знать нормальные напряжения, действующие по верхней грани полки и внизу ребра балок. Требуемые данные представлены на *рисунках 2–7*.

Изгибающий момент вычисляется по формуле [13, с. 408; 14]:

$$M_{B,x} = I_x \times \frac{\sigma_{x_{bt}} - \sigma_{x_{bc}}}{h}, \quad (1)$$

$$\sigma_{x_{bt}} = \frac{\sigma_{x_{bt},1} + \sigma_{x_{bt},2} + \dots + \sigma_{x_{bt},n}}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{x_{bt},i}}{n}, \quad (2)$$

$$\sigma_{x_{bc}} = \frac{\sigma_{x_{bc},1} + \sigma_{x_{bc},2} + \dots + \sigma_{x_{bc},n}}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{x_{bc},i}}{n}, \quad (3)$$

где: I_x — момент инерции балок; h — высота конструкции; n — количество анализируемых конечных элементов; $\sigma_{x_{bt}}$, $\sigma_{x_{bc}}$ — усредненные напряжения растяжения и сжатия в крайних фибрах бетона конструкции.

При определении геометрических характеристик тавровых балок и анализа напряжений ширину свесов полки ограничиваем условием $b_{св} \leq 3h_{пл}$ [3, с. 170], учитывая расстояние между соседними балками.



Рис. 1. Конечно-элементная модель покрытия, показана ¼ часть. Прогибы середины конструкции от действия полной нормативной нагрузки

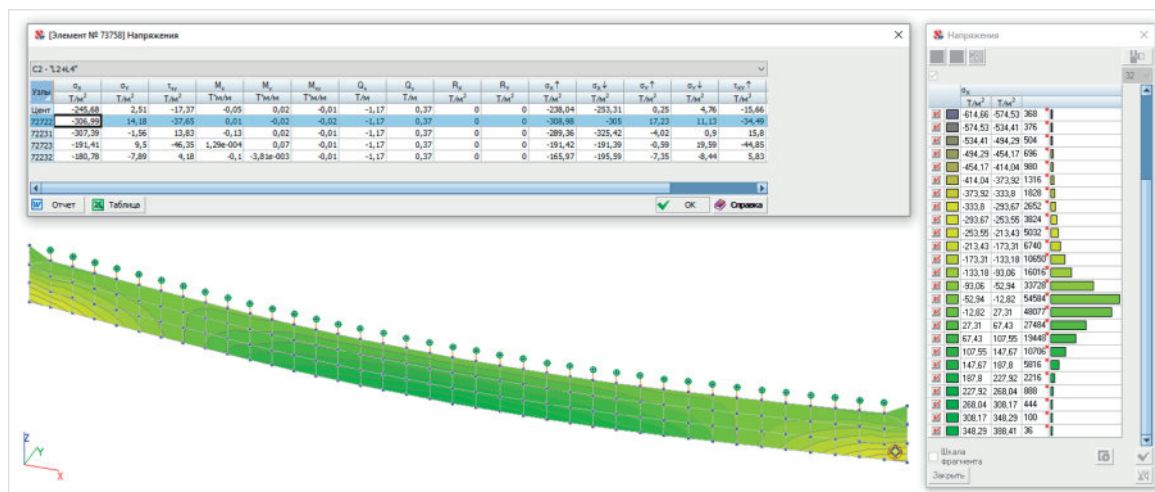


Рис. 2. Напряжения σ_x в ребре балки Б₁. Показаны напряжения внизу опорного участка

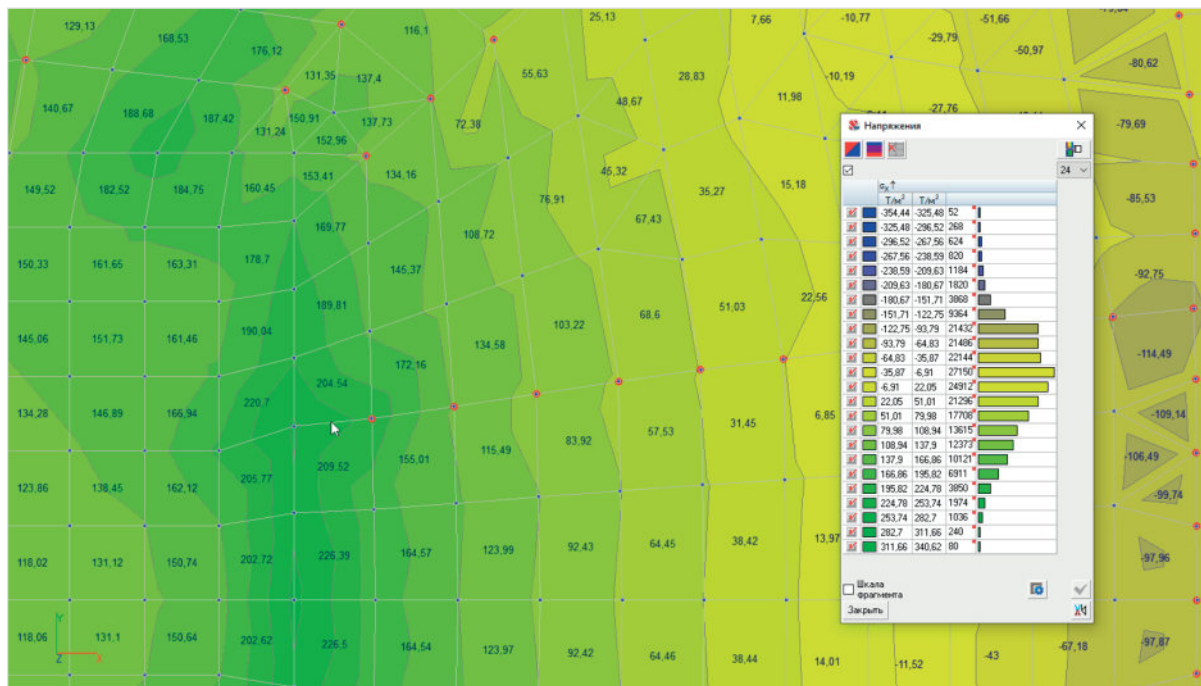


Рис. 3. Напряжения σ_x в верхней зоне полки покрытия. Показан участок в районе капители

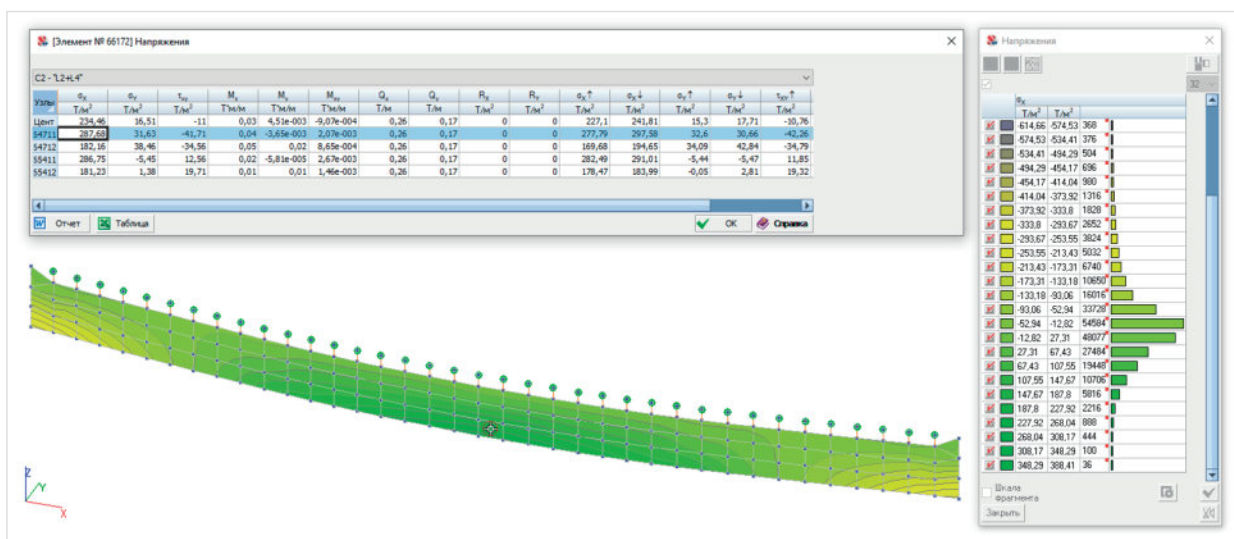


Рис. 4. Напряжения σ_x в ребре короткой изогнутой балки Б₁. Показаны напряжения внизу пролета

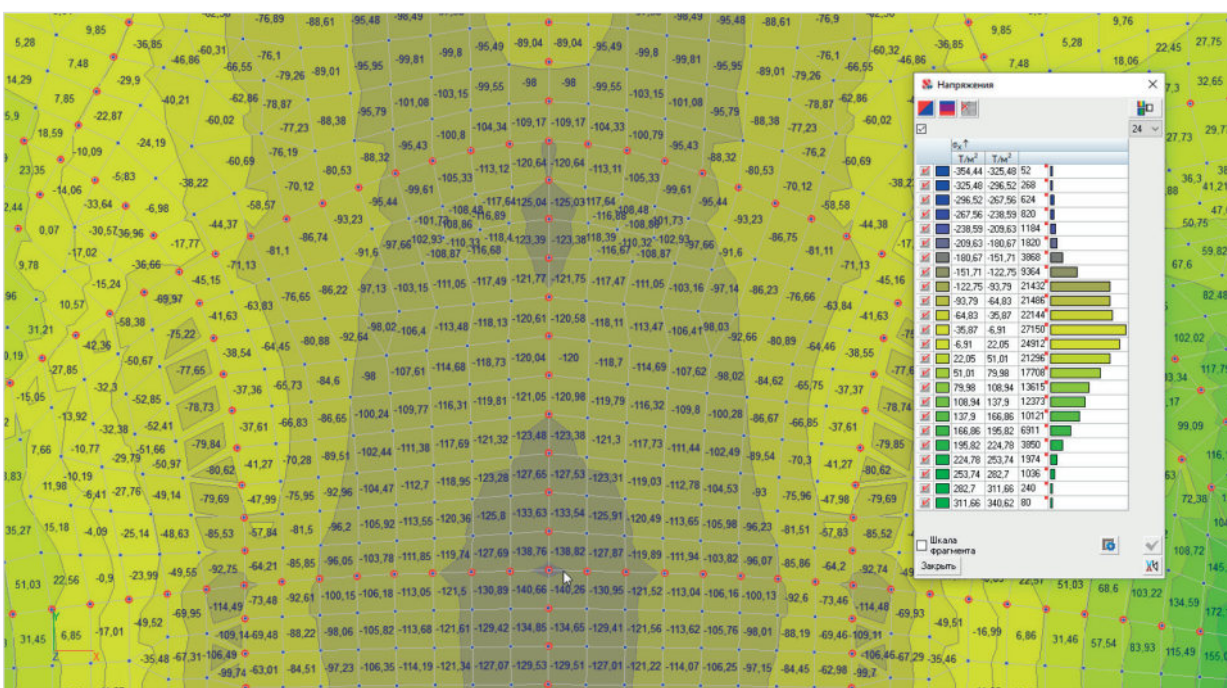


Рис. 5. Напряжения σ_x в верхней зоне полки покрытия. Показан участок в середине пролета балок

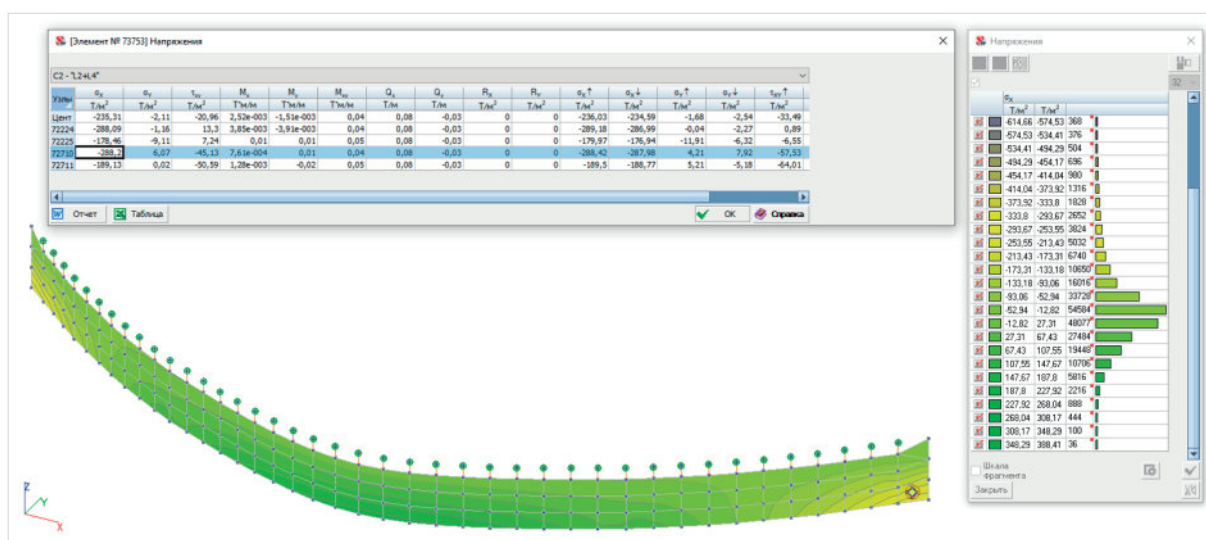


Рис. 6. Напряжения σ_x в ребре длинной изогнутой балки B_2 . Показаны напряжения внизу опорного участка

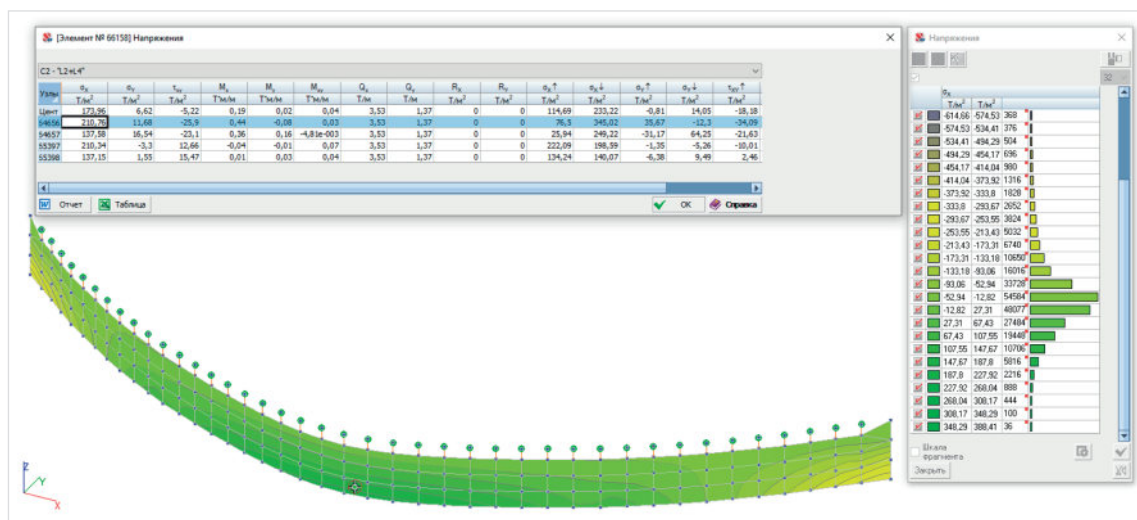


Рис. 7. Напряжения σ_x в ребре длинной изогнутой балки B_2 . Показаны напряжения внизу ребра середины пролета

Определение опорного изгибающего момента в балке B_1 .

$$M_{B1}^{op} = I_x \times \frac{\sigma_{xht} - \sigma_{xhc}}{h} = -\frac{70924}{10^8} \times \frac{209 + 307}{0,32} = -1,14 \text{ Тм}, \quad (4)$$

Определение пролетного изгибающего момента в балке B_1 .

$$M_{B1}^{pr} = I_x \times \frac{\sigma_{xht} - \sigma_{xhc}}{h} = \frac{78226}{10^8} \times \frac{287 + 129}{0,32} = 1,02 \text{ Тм}, \quad (5)$$

Определение опорного изгибающего момента в балке B_2 .

$$M_{B2}^{op} = I_x \times \frac{\sigma_{xht} - \sigma_{xhc}}{h} = -\frac{49836}{10^8} \times \frac{166 + 288}{0,32} = -0,707 \text{ Тм}, \quad (6)$$

Определение пролетного изгибающего момента в балке B_2 .

$$M_{B2}^{pr} = I_x \times \frac{\sigma_{xht} - \sigma_{xhc}}{h} = \frac{74264}{10^8} \times \frac{210 + 110}{0,32} = 0,743 \text{ Тм}, \quad (7)$$

Результаты расчетов представлены в **таблице 1**.

Таблица 1

Изгибающие моменты в главных балках покрытия						
Балка	Опора			Середина пролета		
	Усредненное напряжение в верхней зоне полки $\sigma_{x\uparrow}$ [Т/м ²]	Напряжение в нижней зоне ребра σ_x [Т/м ²]	Изгибающий момент M_x [Тм]	Усредненное напряжение в верхней зоне полки $\sigma_{x\uparrow}$ [Т/м ²]	Напряжение в нижней зоне ребра σ_x [Т/м ²]	Изгибающий момент M_x [Тм]
B_1 криволинейная короткая Модель 2	209	-307	-1,14 (108,8%)	-129	287	1,02 (145,7%)

Балка	Опора			Середина пролета		
	Усредненное напряжение в верхней зоне полки $\sigma_x \uparrow$ [Т/м ²]	Напряжение в нижней зоне ребра σ_x [Т/м ²]	Изгибающий момент M_x [Тм]	Усредненное напряжение в верхней зоне полки $\sigma_x \uparrow$ [Т/м ²]	Напряжение в нижней зоне ребра σ_x [Т/м ²]	Изгибающий момент M_x [Тм]
Б ₁ криволинейная короткая Модель 1 [12]	–	–	–1,048 (100%)	–	–	0,7 (100%)
Б ₂ криволинейная длинная Модель 2	166	–288	–0,707 (91,2%)	–110	210	0,743 (145,4%)
Б ₂ криволинейная короткая Модель 1 [12]	–	–	–0,775 (100%)	–	–	0,511 (100%)

Прогиб в центре конструкции от суммарного действия полезной нормативной нагрузки и собственного веса конструкции составил: модель 1 $f = 4,03$ мм; модель 2 $f = 4,73$ мм.

Анализируя полученные данные, мы видим, что на опорах балок произошло перераспределение усилий. В модели 2 в короткой балке Б₁ изгибающий момент увеличился на 8,8%, а в длинной балке Б₂ изгибающий момент уменьшился на 8,8%. По мнению авторов, это произошло по причине увеличения жесткости опорной части балки Б₁ в модели 2, по сравнению с моделью 1. В модели 1 оси стержней и пластин располагаются на одной прямой и присоединяются к капители, состоящей из объемных конечных элементов, в одном уровне. Заделка стержней в капители обеспечивается твердыми телами. В модели 2 стержни и пластины прикрепляются к опоре в разных уровнях, в узлах, расположенных на расстоянии по высоте: $100/2 + 220/2 = 160$ мм, что делает соединение более жестким. У балки Б₁ полка шире, по сравнению с полкой балки Б₂, поэтому, жесткость опорных частей балок увеличивается не одинаково, а пропорционально их геометрии. «Чем относительно жестче элемент статически неопределимой системы, тем большую долю внешней нагрузки он воспринимает на себя» [15, с. 37]. Усилия в статически неопределимой конструкции регулируют, изменяя ее жесткость [16, с. 35]. Отсутствие жесткости в аналитических формулах определения нагрузок на балки железобетонных кессонных перекрытий приводило к неверным результатам [17].

Пролетные изгибающие моменты в балках Б₁ и Б₂ в модели 2 увеличились на 45%. По нашему мнению, это связано в первую очередь с математическими особенностями расчета метода конечных элементов. Можно предположить, что кручение повлияло на значения изгибающих моментов. Кручение, возникающее в балках ребристых конструкций, уменьшает изгибающие моменты [18, 19]. Сходимость от действия кручения в моделях, состоящих из плоских или объемных конечных элементов, может не обеспечиваться [20, с. 46; 21]. Однако, анализируя значения крутящих моментов в ребрах модели 1, мы видим, что они практически отсутствуют ($M_{кр} = 0,01$ Тм), поэтому, кручение не могло повлиять на НДС системы.

В модели 2 инженер получает больше данных для изучения работы конструкции. Определение усилий по данным модели 2 показало, что расчет обладает большей трудоемкостью, по сравнению с моделью 1. Численный эксперимент подтвердил выводы специалистов, занимающихся расчетами строительных конструкций в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов: какой бы подробной не была компьютерная модель, она всегда будет оставаться моделью с различной степенью точности [3, 5, 16].

Выводы

1. Для подробного и наиболее достоверного изучения работы сложной строительной конструкции необходимо выполнять её анализ при помощи разных конечно-элементных моделей.
2. Верификация полученных данных по методу конечных элементов является обязательным этапом современного проектирования несущих строительных систем.
3. Модель, ребристая часть которой выполнена из плоских конечных элементов, обладает большей информативностью, но и большей трудоемкостью при ее изучении, по сравнению с моделью, ребра в которой выполнены из линейных конечных элементов.

Библиографический список

1. СП 385.1325800.2018 Свод правил. Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения. (утв. и введен в действие Приказом Минстроя России от 05.07.2018 № 393/пр.)
2. Еремеев П. Г. Современные конструкции покрытий над трибунами стадионов. М.: Издательство АСВ, 2015. 236 с.
3. Городецкий А. С., Евзеров И. Д. Компьютерные модели конструкций. К.: Факт, 2005. 344 с.
4. Никитин К. Е., Кирсанов О. А. Сравнительное исследование конечно-элементных методик расчета ребристых железобетонных перекрытий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Том 18. № 3. С. 242 – 254. DOI: 10.22363/1815-5235-2022-18-3-242-254.
5. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
6. Мозголов М. В., Костюков В. В. О сходимости решений моделей вычислительного комплекса SCAD из трехгранной призмы первого порядка. Часть 2. Н-метод // Системные технологии. 2024. № 1 (50). С. 5 – 19. DOI: 10.48612/dnitii/2024_50_5-19.
7. Городецкий А. С., Барабаш М. С., Сидоров В. Н. Компьютерное моделирование в задачах строительной механики. М.: АСВ, 2016. 337 с.
8. Мозголов М. В., Окольников Г. Э. Оценка выбора модели метода конечных элементов для расчета балок на основе распределения касательных напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 539 – 551. DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-539-551.
9. Канчели Н. В., Батов П. А., Дробот Д. Ю. Реализованные мембранные оболочки. Расчет, проектирование и возведение. М.: Издательство АСВ, 2009. 120 с.
10. Секулович М. Метод конечных элементов. Перевод с сербского Ю. Н. Зуева. Под редакцией В. Ш. Барбакадзе. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
11. Качаев А. Е., Сорока В. В., Хитров Я. И. Анализ результатов численного моделирования устойчивости откоса гидротехнического сооружения с подпорной стенкой SRM и SAM методами // Системные технологии. 2025. №3 (56). С. 20 – 31. DOI: 10.48612/dnitii/2025_56_20-31.

12. Мозголов М. В., Костюков В. В., Сорока В. В. Статический анализ железобетонного покрытия шерстопрядильной фабрики Гатти системы Пьера Луиджи Нерви // Системные технологии. 2026. № 1 (58). С. 67 – 81. DOI: 10.55287/22275398_2026_58_67.
13. Пекин Д. А. Плитная сталежелезобетонная конструкция. М.: АСВ, 2010. 440 с.
14. Мозголов М. В., Козлова Е. В. Модель комплекса SCAD из объемных конечных элементов: расчет железобетонных кессонных перекрытий // Вестник НИЦ «Строительство». 2023. №2 (37). С. 18 – 36. DOI:10.37538/2224-9494-2023-2(37)-18-36.
15. Перельмутер А. В. Беседы о строительной механике. М.: Издательство SCAD Soft, Издательский дом АСВ, 2016. 304 с.
16. Городецкий А. С., Батрак Л. Г., Городецкий Д. А., Лазнюк М. В., Юсипенко С. В. Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона. К.: «Факт», 2004. 106 с.
17. Мозголов М. В. Об ошибках примера расчета железобетонной кессонной панели перекрытия в справочнике проектировщика // Градостроительство и архитектура. 2023. Т. 13. № 3. С. 13 – 22. DOI: 10.17673/Vestnik.2023.03.02.
18. Мозголов М. В., Козлова Е. В. О разгружающем действии крутящих моментов в балках железобетонных кессонных перекрытий // Градостроительство и архитектура. 2022. Т. 12. № 3. С. 11 – 20. DOI: 10.17673/Vestnik.2022.03.2.
19. Мозголов М. В., Костюков В. В., Омелянчук Д. Г. О влиянии окаймляющей балки на напряженно-деформированное состояние косоугольного кессонного железобетонного перекрытия // Системные технологии. 2024. № 4 (53). С. 32 – 42. DOI: 10.48612/dnitii/2024_53_32-42.
20. Краснощеков Ю. В. Проектирование конструктивных систем перекрытий и покрытий. Монография. М.: Инфра — Инженерия, 2018. 188 с.
21. Мозголов М. В., Костюков В. В., Сорока В. В. Верификация компьютерных моделей на основании распределения касательных напряжений и угла поворота сечения от действия кручения // Системные технологии. 2025. № 4 (57). С. 5 – 17. DOI: 10.48612/dnitii/2025_57_5-17.

STATIC ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE PAVEMENT OF THE GATTI WOOL SPINNING MILL USING A MODEL FOR SOLVING A PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY

M. V. Mozglov
V. V. Kostyukov
D. S. Lebedev

Kolomna Institute (branch) of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Moscow Polytechnic University», Kolomna

Abstract

Due to the high-dimensionality of problems in analyzing statically indeterminate systems at the current stage of design work, it is impossible to do without computer calculations based on the finite element method. However, it is important to remember that the finite element method is an approximate numerical method of mathematical physics, and the results obtained using it for different finite element models can differ significantly. For a detailed and reliable study of the behavior of a complex building structure, it is necessary to analyze it using different finite element models.

This paper compares the bending moments in the main beams of a bionic roof structure designed by Pier Luigi Nervi, calculated using data from two finite element models. The models differ in the types of finite elements in the superstructure, modeling the flange and ribs of the T-beams. The first model is constructed of shells and rods connected by a rigid insert. The second model consists of shells connected by a solid. The supporting part of the structure, shaped like a capital, is made of volumetric finite elements. Analysis of the obtained data revealed that a redistribution of forces occurred in the supporting portion of the beams of the second model, and the span bending moments increased by 45%.

The practical significance of this work is for design engineers performing strength calculations of building structures using software packages based on the finite element method.

The Keywords

Pier Luigi Nervi, stress, bending moments, finite element model, verification, result convergence, ribbed floor, structural rigidity.

Date of receipt in edition

09.09.2026

Date of acceptance for printing

13.09.2026

Ссылка для цитирования:

М. В. Мозголов, В. В. Костюков, Д. С. Лебедев. Статический анализ железобетонного покрытия шерстопрядильной фабрики Гатти при помощи модели решения плоской задачи теории упругости. — Системные технологии. — 2026. — № 3 (60). — С. 86–96.